

С. В. Пашков, к-т техн. наук
А. В. Герасимов, д-к физ-мат. наук
НИИ Прикладной математики и механики
Томского Государственного Университета
(Россия, 634050, Томск, пр. Ленина, 36,
тел.(3822) 529-569, E-mail: s300@ngs.ru)

Прозрачные границы. Уменьшение погрешности, вносимой границей расчетной области при численном моделировании конечного участка бесконечного пространства

Аннотация. Описан вариант не отражающих граничных условий, позволяющий при моделировании конечного участка бесконечного пространства пропускать упруго-пластические волны за границы расчетной области без ложных отражений. Сформулированы условия, позволяющие применять данный подход. На примере взаимодействия ударника с полупространством в трехмерной постановке показано, что описываемый подход позволяет снизить размеры расчетной области при сохранении точности (доверительного временного интервала), а для конкретных размеров расчетной области - существенно повысить точность и доверительный временной интервал.

Введение. При моделировании взаимодействия ударника, осколков или продуктов детонации ВВ с достаточно протяженными объектами, очень часто встает вопрос - как ограничить расчетную область, чтобы снизить время расчета, но при этом сохранить приемлемую точность. Если размеры области определять из принципа «волна, отраженная от границ расчетной области, не должна достигнуть интересующего нас участка ранее завершения основного этапа исследуемого процесса», то либо размеры этой области приходится брать достаточно большими, увеличивая время счета, либо ограничивать временной интервал расчета, что не позволяет провести исследование с достаточной полнотой. При взаимодействии объектов с достаточно маленькими скоростями, этот подход накладывает еще большие ограничения, либо вообще не применим.

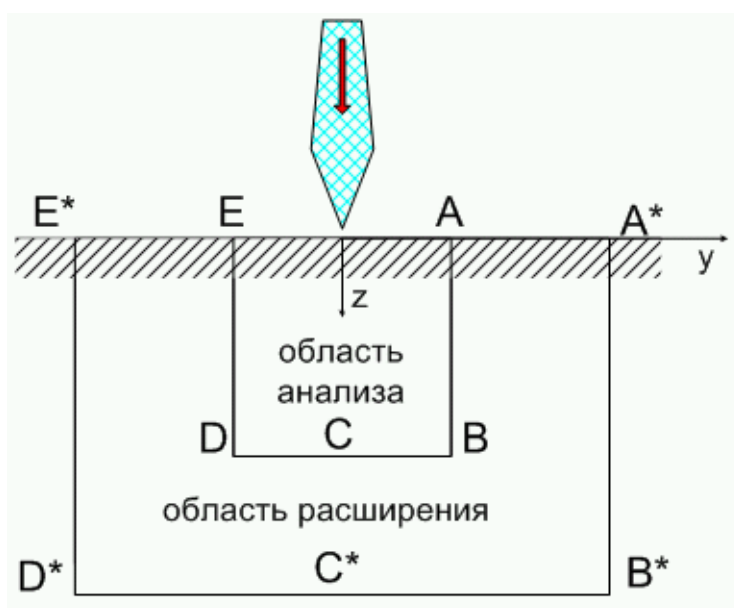


Рисунок 1. Определение области расчета.

Для того, что бы увеличить временной интервал, в течение которого состояние интересующего нас участка (например, ABCDE на рисунке 1) можно считать достоверным, необходимо увеличить область расчета до прямоугольника A*B*C*D*E* (рисунок 1). Если же рассматривать только участок ABCDE, то граница расчетной области на участках AB-BD-DE, после того, как возмущение дойдет до нее, будет отражать волны внутрь, независимо от использующихся граничных условий на ней - условия свободной границы или условия жесткого закрепления. В то же время, непосредственно область «расширения» не интересует нас с точки зрения моделирования и анализа. Поэтому, можно попытаться решить эту задачу с гораздо меньшими затратами, ограничив область расчета интересующим нас участком ABCDE, но с постановкой на нем соответствующих не отражающих (non-reflected) граничных условий в виде «прозрачной границы», которая не отражает возмущение, а позволяет ему пройти беспрепятственно.

Начиная с 1970х годов, разработкой не отражающих граничных условий занимались многие исследователи [1], используя для этого различные подходы и принципы. Тем не менее, предлагаемые варианты, как правило, громоздки и трудоемки и ориентированы на частный случай расположения источника возмущений по отношению к границе. Особую трудность вызывает создание не отражающих граничных условий для упругой среды [2,3,4,5], так как наличие сдвиговой компоненты и, соответственно, различная скорость распространения продольных и поперечных волн, в общем случае не позволяет определить направление распространения импульса возмущений, подошедшего к границе расчетной области.

Постановка задачи. Будем исходить из того, что любые возмущения, приходящие к границам расчетной области, можно представить в виде суперпозиции продольных и поперечных волн, распространяющихся со скоростями c^k в направлении $\vec{\tau}^k$:

$$\sigma_{ij} = \sum_k \sigma_{ij}^k = \sigma_{ij}^0 + \sum_k A_{ij}^k (\vec{\tau}^k \vec{r} - c^k t) \quad (1)$$

где $A_{ij}^k = \frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial \vec{\tau}^k}$ - профиль отдельной волны, \vec{r} – радиус-вектор.

Поскольку нас интересует поведение волны на участке размером порядка шага по координате, затуханием можно пренебречь и для каждой волны

(возмущения) справедливо $\frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial \tau^{-k}} = -\frac{1}{c^k} \frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial t}$, поэтому, уравнение движения для

обычного случая запишется в виде

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial \tau^{-k}} \frac{\partial \tau^{-k}}{\partial x_j} = \sum_k -\frac{1}{c^k} \frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial t} \tau_j^{-k} \quad (2)$$

$$\delta V_i = \frac{-1}{\rho} \sum_k \frac{\delta \sigma_{ij}^k}{c^k} \tau_j^{-k} \quad (3)$$

В общем случае, мы не можем разделить напряжения в точке на составляющие, соответствующие каждой волне, даже выделить отдельные волны практически нереально. Однако в случае, если можно разделить возмущения по скорости распространения, и все волны, приходящие на границу расчетной области, падают под одним и тем же углом ($\vec{\tau}^k$ можно вынести за знак суммирования), можно считать, что изменения скорости в точке однозначно определяются изменением напряжений.

Допустим, что граница расчетной области расположена таким образом, что все $\vec{\tau}^k$ совпадают с ее нормалью \vec{n} (все волны возмущений падают на границу нормально. Разделим эти нормально падающие волны на продольные и поперечные (приняв, что в поперечной волне ненулевыми являются лишь сдвиговые напряжения).

$$\begin{aligned} \delta V_i &= \frac{-1}{\rho} \sum_k \frac{\delta \sigma_{ij}^k}{c^k} n_j = \frac{-1}{\rho} \left(\sum_k^{prod.} \frac{\delta \sigma_{ij}^k}{c^{prod.}} n_j + \sum_k^{nonep.} \frac{\delta \sigma_{ij}^k}{c^{nonep.}} n_j \right) = \\ &= \frac{-1}{\rho} \left(\frac{\delta f_i^{prod.}}{c^{prod.}} + \frac{\delta f_i^{nonep.}}{c^{nonep.}} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

где $f_i = \sigma_{ij} n_j$ - вектор поверхностных усилий на площадке с нормалью \vec{n} .

Соответственно, для продольной волны будем иметь составляющую вектора f , параллельную \vec{n} , а для поперечной – перпендикулярную \vec{n} . Таким образом,

$$\delta \vec{V} = \delta \vec{V}_n + \delta \vec{V}_\perp, \quad \text{где} \quad (5)$$

$$\delta V_n = \frac{-1}{\rho c^{prod.}} (\delta \vec{f})_n \quad \text{- составляющая, обусловленная продольной волной}$$

$$\delta V_\perp = \frac{-1}{\rho c^{nonep.}} (\delta \vec{f})_\perp \quad \text{- составляющая, обусловленная поперечной волной}$$

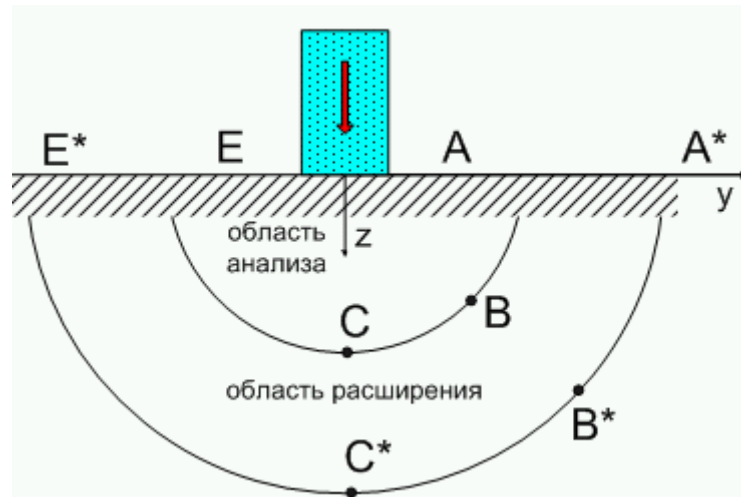


Рисунок 2. Схема расчета

Результаты расчетов. Рассмотрим влияние различных вариантов задания граничных условий для задачи высокоскоростного взаимодействия

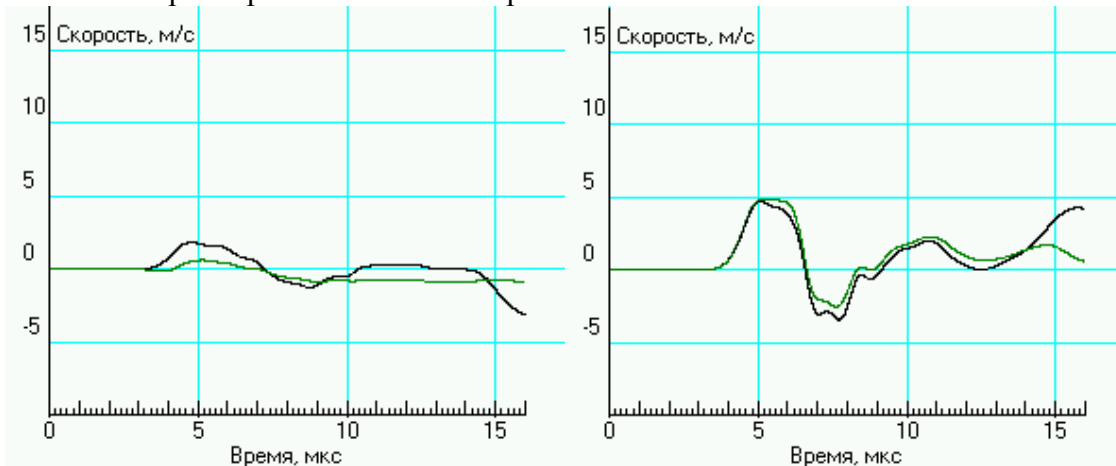
цилиндрического ударника с полупространством (рисунок 2). Скорость ударника бралась равной 300 м/с. Исходя из требования нормального падения волн на прозрачную границу, выберем область расчета в виде полусферы.

Смоделируем задачу в следующих вариантах:

- 1) Расчетная область $A^*B^*C^*D^*E^*$, жесткое закрепление на контуре $A^*-C^*-E^*$;
- 2) Расчетная область ABCDE, «прозрачные границы» на контуре A-C-E;

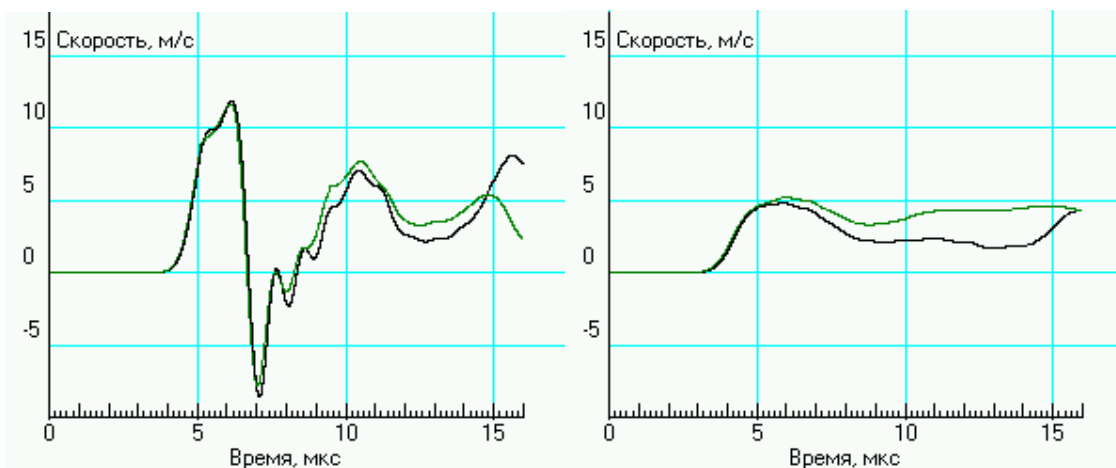
Возьмем в качестве контрольных точки A, B и C и сравним (рисунок 3) значения некоторых определяющих показателей - компоненты вектора скорости среды в определенных точках на границе: $V_z(A)$, $V_z(B)$, $V_z(C)$, $V_y(A)$, $V_y(B)$.

Сравнение результатов расчетов, для граничных условий с жестким закреплением на контуре $A^*-C^*-E^*$ и с условием свободной поверхности на этом контуре, показывает расхождение этих параметров, начиная с 14 мкс, когда сигнал, отраженный от границы $A^*-B^*-C^*-D^*-E^*$, достигает, а точнее, возвращается в точки A, B и C. До этого момента будем считать точным решением для рассматриваемых параметров, их значение в расчете с жестким закреплением $A^*-C^*-E^*$. На графиках рисунка 3, видно, что до этого момента значения параметров показывают хорошее согласование.



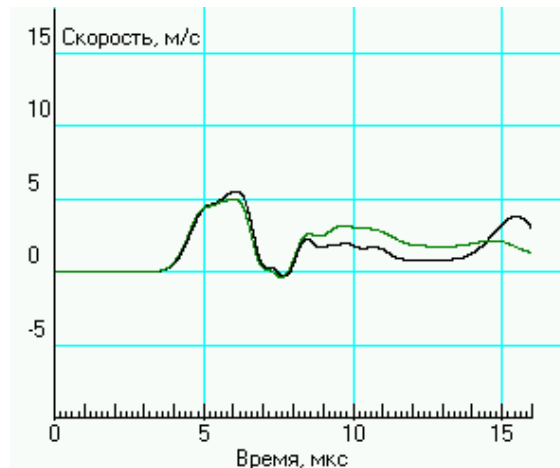
а)

б)



в)

г)



д)

Рисунок 3. Сравнение скорости в контрольных точках: а) $-V_z$ в точке А; б) V_z в точке В; в) V_z в точке С; г) V_y в точке А; д) V_y в точке В.

Наибольшее значения погрешность достигает для точки А, в связи с тем, что свободная поверхность является (за счет разгрузки) источником возмущений, распространяющихся, в том числе, и внутрь расчетной области. Прозрачные границы, естественно, ничего не знают о возмущениях, которые могут приходить извне (в данном случае - с участков А-А* и Е-Е*), поэтому погрешность постепенно накапливается. Однако, качественное совпадение говорит о том, что возмущения действительно проходят сквозь «прозрачную границу» и наблюдаемой погрешностью в большинстве задач можно пренебречь.

Заключение. Применение описанного варианта не отражающих граничных условий позволяет снизить размеры расчетной области при сохранении точности (доверительного временного интервала), а при неизменных размерах расчетной области – снизить погрешность и увеличить доверительный временной интервал. Простота описанного метода и его локальность (отсутствие необходимости при расчете граничных условий учитывать параметры в остальных точках границы) делают его предпочтительным при расчете широкого класса задач.

Работа выполнена при частичном финансировании по программе Минобрнауки РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)" (проект РНП 2.1.2. 2398) и частичной поддержке грантов РФФИ №06-08-00903а и №07-08-00623а.

Список литературы

1. Dan Givoli. High-order local non-reflecting boundary conditions: a review // Wave Motion. 2004. V.39, P.319-326
2. И.Л. Софронов. Условия полной прозрачности на сфере для трехмерного волнового уравнения. // Доклады РАН. 1992. Т. 326, № 6, с. 453 - 457
3. D. Givoli, D. Cohen. Non-reflecting boundary conditions based on Kirchhoff-type formulae // J. Comput. Phys. 1995. V.117, P.102-113.
4. A. Mugan, G.M. Hulbert. Nonreflecting boundary conditions in elastodynamics for finite element methods based upon off-surface boundary integral equations // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000. V.190, P.1289-1307
5. M.J. Grote. Nonreflecting boundary conditions for elastodynamic scattering // J. Comput. Phys. 2000. V.161 P.331-353.